بحث عن

الحالة الخامسة
من حالات تطابق المثلثين

إعداد

أ / عبدالمهيمن محمد فواز

معلم رياضيات بالأزهر الشريف

تليفون / 00201226522996

العنوان / كفرالدوار ـ محافظة البحيرة ـ جمهورية مصر العربية

(ملخص موجز عن البحث)
Abstract

هذا البحث يهدف إلي استنتاج حالة خامسة من حالات تطابق المثلثين وهي حالة تهتم بالمثلثين المتساويين في المساحة وكما هو معلوم لدينا أنه اذا كان المثلثان متطابقين فإنهما يكونا متساويين في المساحة والعكس ليس صحيح دائما وبحثي يتعرض للحالة التي فيها يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة وما هي الشروط الضرورية الواجب توافرها في المثلثين المتساويين في المساحة حتي يتطابقا ؟

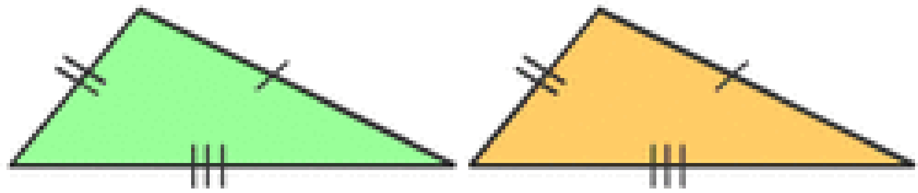
وبعد دراسة تم ذكرها بالبحث عن توافر بعض العناصراستطعت في هذا البحث أن أصل إلي نص الحالة الخامسة من حالات تطابق المثلثين والتي تنص علي:

" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابقت زاوية وضلع في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

Introduction (مقدمة)

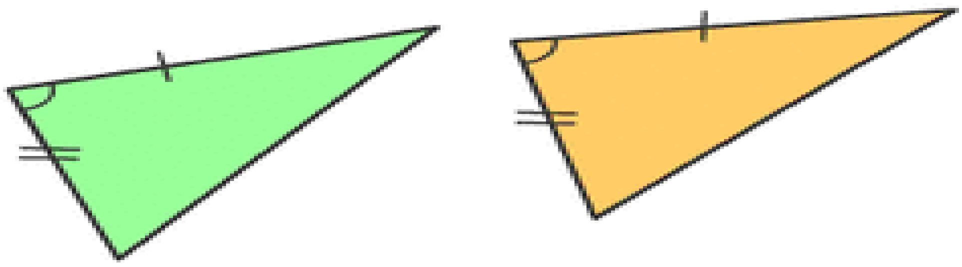
معلوم لدينا أنه يوجد أربع حالات من حالات تطابق المثلثين :

<u>الحالة الأولي (SSS) التطابق بثلاثة أضلاع</u>



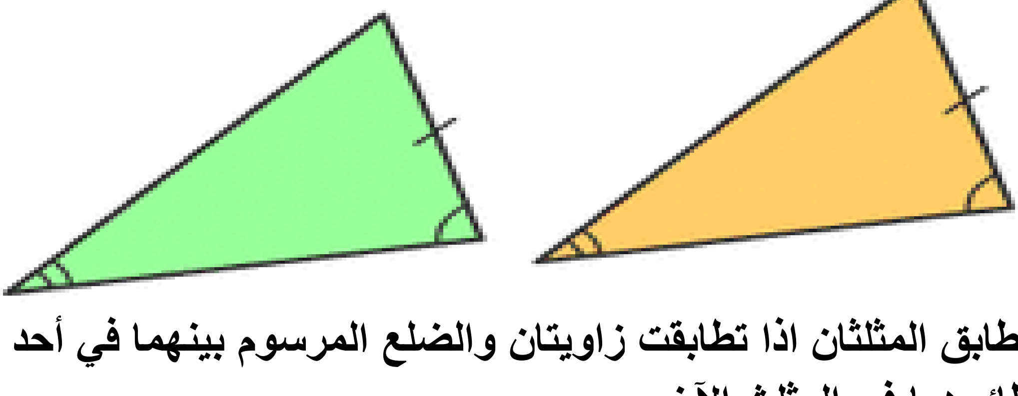
يتطابق المثلثان اذا تطابقت أضلاع أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر

<u>الحالة الثانية (SAS) التطابق بضلعين وزاوية محصورة</u>



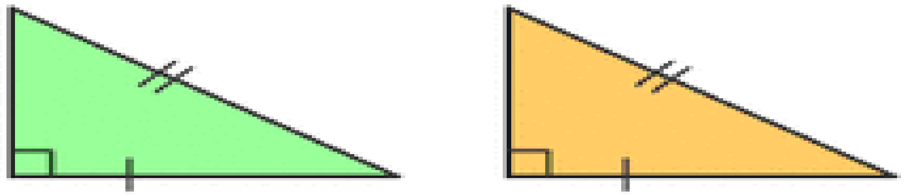
يتطابق المثلثان اذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر

<u>الحالة الثالثة (ASA) التطابق بزاويتين والضلع المرسوم بينهما</u>



يتطابق المثلثان اذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بينهما في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر

الحالة الرابعة (حالة خاصة بالمثلثين القائما الزاوية)



يتطابق المثلثان القائما الزاوية اذا تطابق وتر وأحد ضلعي القائمة في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر

وقد ذكرت بعض المراجع وهي التي تدرس بالمناهج الخليجية

أن الحالة الرابعة هي (AAS) التطابق بزاويتين والضلع الغير مرسوم بينهما

يتطابق المثلثان اذا تطابقت زاويتان والضلع الغير محصور بينهما في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر

في دراسة هذه الحالات نجد أن التطابق يؤدي الي تساوي المساحات

والسؤال هنا متي يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة ؟

بالبحث عن إجابة هذا السؤال وجدت أنه يجب توافر عنصرين متناظرين متطابقين بجانب شرط المساحة حتي ينتج تطابق المثلثين علي أن يكون أحد هذين العنصرين زاوية فإما أن يكون العنصران :

(زاويتين أو زاوية وضلع أو زاوية والعمود الساقط من هذه الزاوية أو زاوية والمنصف لها أو زاوية والمتوسط للضلع المقابل لهذة الزاوية)

وقد وجدت أنه في حالة لو تطابق ضلع والزاوية المقابله له بجانب شرط المساحة سوف ينتج تطابق المثلثين دون اللجوء لأي حالة من الحالات الأربع المعروفة في التطابق وقد أستطعت برهنة ذلك جبريا

حل معادلتين من الدرجة الثانية

نظام معادلات من الدرجة الثانية التي اعتمد عليها البحث

لأي أربع أعداد حقيقية $a\ , b\ , x\ , y \in R^{+}$

إذا كان

$\boxed{a \cdot b = x \cdot y} \longrightarrow \text{I}$ and $\boxed{a^2 + b^2 = x^2 + y^2} \longrightarrow \text{II}$

فإنه

$a = x$ و $b = y$

or

$a = y$ و $b = x$

الإثبات

$\because a \cdot b = x \cdot y$ $\quad \boxed{\therefore 2ab = 2xy} \longrightarrow \text{III}$

بجمع المعادلة II مع المعادلة III ينتج أن

بأخذ الجذر التربيعي الموجب $(a+b)^2 = (x+y)^2$

$\boxed{\therefore\ a + b = x + y} \longrightarrow \text{IV}$

بطرح المعادلة III مع المعادلة II ينتج أن

بأخذ الجذرين التربيعيين $(a-b)^2 = (x-y)^2$

$\boxed{a - b = x - y \quad \text{or} \quad b - a = x - y} \longrightarrow \text{V}$

بحل المعادلتين IV ، V ينتج أن

$a = x$ و $b = y$

or

$a = y$ و $b = x$

(طبيعة البحث)

نص الحالة :

" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابق ضلع وزاوية في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

1 **أن تكون الزاوية مقامة على الضلع من إحدي نهايتيه وفي هذه الحالة يكون تطابق المثلثين بضلعين والزاوية المحصورة بينهما .**

2 **أن تكون الزاوية مقابلة للضلع وفي هذه الحالة ينتج تطابق المثلثين بالإثبات الجبري دون الرجوع لإحدى الحالات الأربع المعروفة**

وهذه هي طبيعة البحث

الإثبـــات

المعطيات

In Δ ABC و Δ XYZ

Area of Δ ABC = Area of Δ XYZ

$m(\hat{A}) = m(\hat{X})$ و BC= YZ

المطلوب

Prove That : $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

البرهان

$\because$ Area of ΔABC = Area of ΔXYZ

$\therefore \frac{1}{2}\, b.c \sin(\hat{1}) = \frac{1}{2}\, y.z \sin(\hat{2})$ ، $\because m(\hat{1}) = m(\hat{2})$

$\therefore \; b.c = y.z \longrightarrow \text{I}$

وبإستخدام قانون جيب التمام

$\because \cos(\hat{1}) = \cos(\hat{2})$

$$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}$$

ومن المعادلة I , $\because a = x$, ينتج أن ..

$$b^2 + c^2 = y^2 + z^2 \longrightarrow \text{II}$$

بحل المعادلتين I ، II بالنظام المعروض بالبحث والمثبت سابقاً ينتج أن : -

$b = y$ و $c = z$

Or

$b = z$ و $c = y$

$\therefore \Delta\, ABC \equiv \Delta\, XYZ$ Or $\therefore \Delta\, ABC \equiv \Delta\, XZY$

$\therefore$ المثلثان متطابقان بالبرهان الجبري دون الرجوع لأي حالة من الحالات الأربع المعروفة

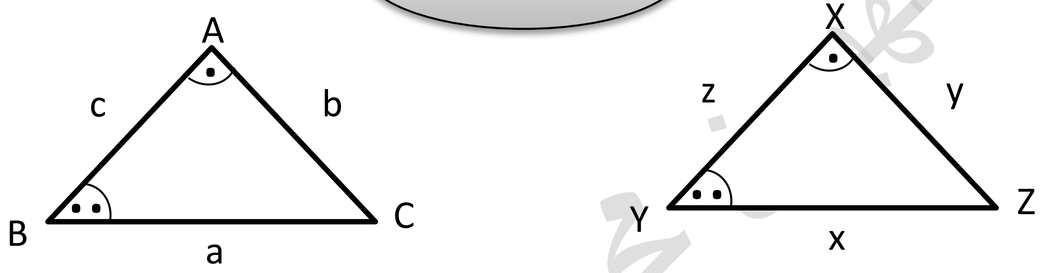
<u>بعض العناصر التى اذا توافرت بجانب المساحة ينتج التطابق</u>

<u>أولا : تطابق زاويتان</u>

" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة اذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

وهذه الحالة فيها المثلثان متشابهان ومنها ينتج التطابق لأن النسبة بين مربعي طولي أي ضلعين متناظرين تساوي النسبة بين مساحتيهما وبما أن المساحات متساوية سينتج تطابق الأضلاع المتناظرة (SSS)

الإثبات



<u>المعطيات</u>

In ΔABC و ΔXYZ

Area of ΔABC = Area of ΔXYZ

$m(\hat{A}) = m(\hat{X})$ و $m(\hat{B}) = m(\hat{Y})$

<u>المطلوب</u>

Prove That : $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

<u>البرهان</u>

$\because m(\hat{A}) = m(\hat{X})$ و $m(\hat{B}) = m(\hat{Y})$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta XYZ$

$$\therefore \left[\frac{a}{x}\right]^2 = \left[\frac{b}{y}\right]^2 = \left[\frac{c}{z}\right]^2 = \frac{\text{Area of } \Delta ABC}{\text{Area of } \Delta XYZ}$$

$\because$ المساحات متساوية $\therefore$ أطوال الأضلاع المتناسبة متساوية

$a = x$ و $b = y$ و $c = z$ $\therefore \Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

ثانيا : تطابق زاوية وضلع

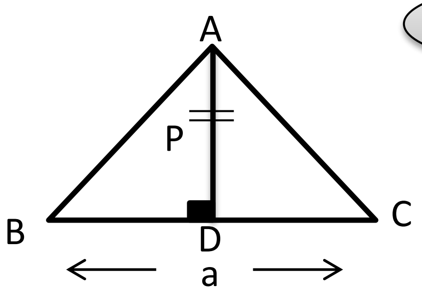
" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابق ضلع وزاوية في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر" وقد سبق برهنة هذة الحالة وهي طبيعة بحثي

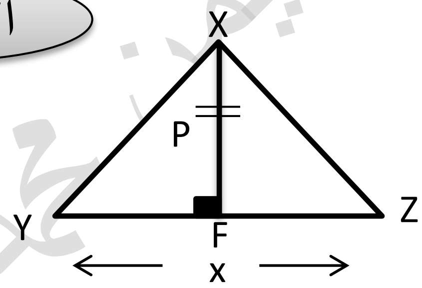
ثالثا : تطابق زاوية والعمود الساقط من هذه الزاوية

"يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابقت زاوية والعمود الساقط منها في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

وهذه الحالة فيها الأعمدة الخارجة من الزاوية متطابقة وبما أن المثلثين متساويين في المساحة فأن قواعدهما تكون متساوية في الطول (أي الضلعين المقابلين للزاويتين المتطابقتين يكونان متطابقان) وتكون تطابق زاوية والضلع المقابل لها في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر وهذة هي الحالة المذكورة ببحثي

الإثبات





المعطيات

Area of ΔABC = Area of ΔXYZ و $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ و $\overline{XF} \perp \overline{YZ}$ و AD = XF

المطلوب

Prove That : Δ ABC $\equiv$ Δ XYZ

البرهان

$\because$Area of Δ ABC = Area of ΔXYZ

$\therefore$ ½ a.p = ½ x.p $\qquad$ **$\therefore$ a= x**

وينتج شروط الحالة الخامسة

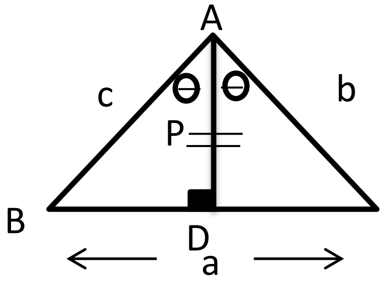
Δ ABC و Δ XYZ $\left\{\begin{array}{l}\text{(1) Area of } \Delta \text{ABC = Area of } \Delta \text{ XYZ} \\ \text{(2) } m(\hat{A}) = m(\hat{x}) \\ \text{(3) BC = YZ}\end{array}\right.$

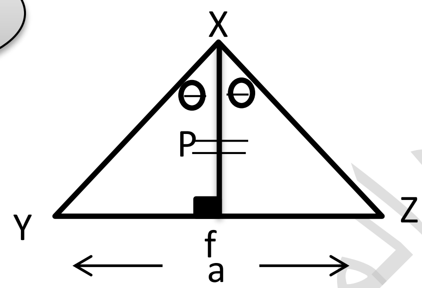
$\therefore$ ΔABC $\equiv$ Δ XYZ

رابعا : تطابق زاوية والمنصف لهذة الزاوية

" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابقت زاوية والمنصف لها في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

الإثبات





المعطيات

Area of ΔABC = Area of ΔXYZ و $m(\hat{A}) = m(\hat{X}) = 2\ominus$

$\overrightarrow{AD}$ ينصف $(B\hat{A}C)$ و $\overrightarrow{XF}$ ينصف $(Y\hat{X}Z)$ و AD = XF

المطلوب

Prove That : $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

البرهان

$\because$ Area of ΔABC = Area of ΔXYZ , $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$

$\therefore b.c = y.z \longrightarrow \text{I}$

Area of ΔABD + Area of ΔADC = Area of ΔXYF + Area of ΔXFZ

$\therefore \frac{1}{2} P.c \sin\ominus + \frac{1}{2} P.b \sin\ominus = \frac{1}{2} P.z \sin\ominus + \frac{1}{2} P.y \sin\ominus$

بالقسمة ÷ $\frac{1}{2} P \sin\ominus$ ينتج أن $b + c = y.z$

(بتربيع الطرفين)

$b^2 + 2bc + c^2 = y^2 + 2yz + z^2$

ومن المعادلة I فإن $2bc = 2yz$

$\therefore b^2 + c^2 = y^2 + z^2 \longrightarrow \text{II}$

بحل المعادلتين I ، II جبرياً بالنظام المثبت بالبحث ينتج أن

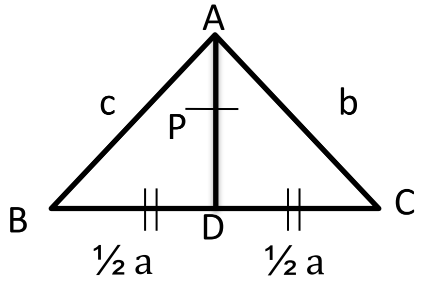
$b = y$ و $c = z$ or $b = z$ و $c = y$

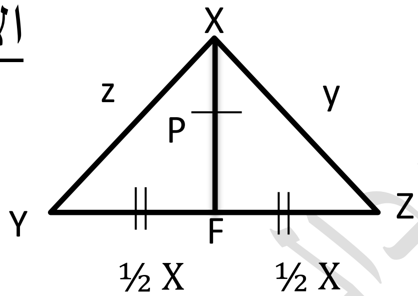
$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta XYZ$

خامسا : تطابق زاوية والمتوسط للضلع المقابل لهذه الزاوية

" يتطابق المثلثان المتساويان في المساحة إذا تطابقت زاوية والمتوسط للضلع المقابل لهذه الزاوية في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر "

الإثبات





المعطيات

Area of ΔABC = Area of ΔXYZ و $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$

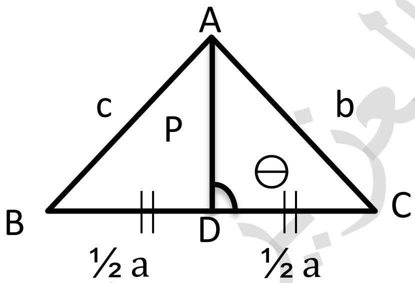
D منتصف $\overline{BC}$ و F منتصف $\overline{YZ}$

المطلوب

Prove That : Δ ABC ≡ Δ XYZ

البرهان

∵Area of ΔABC = Area of ΔXYZ و $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$



∴ b.c = y.z ⟶ I

In ΔABC

نحاول إيجاد علاقة بين طول المتوسط وأضلاع Δ

$$\text{In } \Delta ADC \Longrightarrow \cos\theta = \frac{P^2+(\frac{1}{2}a)^2-b^2}{2.\frac{1}{2}a\,p} = \frac{P^2+\frac{1}{4}a^2-b^2}{p\,.\,a}$$

$$\text{In } \Delta ADB \Longrightarrow \cos(180-\theta) = \frac{P^2+(\frac{1}{2}a)^2-c^2}{2.\frac{1}{2}a\,p} = \frac{P^2+\frac{1}{4}a^2-c^2}{p\,.\,a}$$

$\because \cos(180 - \theta) = -\cos\theta$

$\therefore p^2 + \frac{1}{4}a^2 - c^2 = b^2 - p^2 - \frac{1}{4}a^2$

$\therefore 2p^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2 \longrightarrow$ بضرب المعادلة $\times 2$

$4p^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \longrightarrow \text{II}$

$4p^2 = 2y^2 + 2z^2 - x^2 \longrightarrow \text{III}$ بالمثل $\Delta\ XYZ$ ينتج أن

بمساواة II ، III ينتج أن

$$\boxed{2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2y^2 + 2z^2 - x^2} \longrightarrow \text{IV}$$

من المعادلة I ، $\because \cos(\hat{A}) = \cos(\hat{X})$

$\therefore 2bc\cos(\hat{A}) = 2yz\cos(\hat{X})$

$$\boxed{b^2 + c^2 - a^2 = y^2 + z^2 - x^2} \longrightarrow \text{V}$$

بطرح المعادلة V من المعادلة IV ينتج أن

$$\boxed{b^2 + c^2 = y^2 + z^2} \longrightarrow \text{VI}$$

بحل المعدلتين II ، VI بالنظام الجبري المثبت بالبحث ينتج أن

$b = y \quad , \quad c = z$

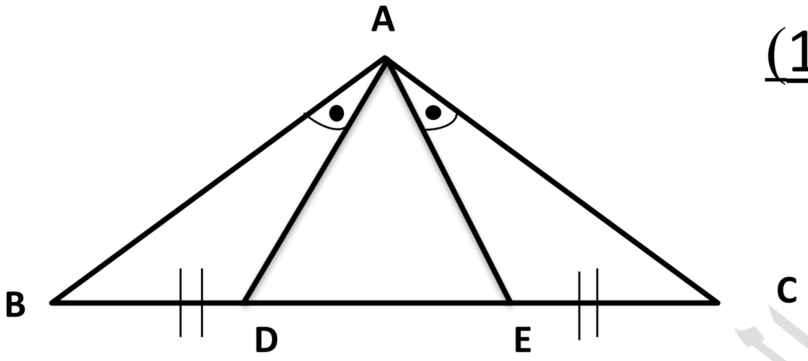
or

$b = z \quad , \quad c = y$

$\therefore \Delta ABC \equiv \Delta XYZ$ or $\Delta ABC \equiv \Delta XZY$

بعض من المسائل التى استطاعت هذه الحالة الخاصة حلها

مثال رقم (1)



In Δ ABC : D , E $\in \overline{BC}$ بحيث BD = EC

And $m(E\hat{A}C) = m(B\hat{A}D)$

Prove that: $\Delta ABD \equiv \Delta AEC$

البرهان

In Δ ABD, Δ AEC
- (1) لهما نفس الرأس
- (2) قواعدهما متساوية في الطول
- B D = E C

$\therefore$ Area of Δ ABC = Area of Δ XYZ

وينتج التطابق بالحالة الخامسة

(1) Area of Δ ABC = Area of Δ XYZ

(2) $m(B\hat{A}D) = m(E\hat{A}C)$

(3) BD = EC

مثال رقم (2)

In Δ ABC, Δ XYZ $\begin{cases} \text{(1) Area of } \Delta \text{ ABC} = \text{Area of } \Delta \text{XYZ} \\ \text{(2) } m(\hat{A}) = m(\hat{X}) \\ \text{(3) The perimeter of } \Delta\text{ABC} = \text{Perimeter of } \Delta\text{XYZ} \end{cases}$

Prove that: Δ ABC $\equiv$ Δ XYZ

البرهان : -

$\because$ Area of Δ ABC = Area of ΔXYZ , $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$

$\boxed{\therefore\ b \cdot c = y \cdot z} \longrightarrow \mathrm{I}$

$\because$ The perimeter of ΔABC = The perimeter of Δ XYZ = L

$\therefore a + b + c = x + y + z = L$

$\boxed{c + b = L - a}$ $\boxed{y + z = L - x}$

$\downarrow$

II

$\because \ \cos(\hat{A}) = \cos(\hat{X})$ ، من المعادلة I

$\therefore \ 2bc\cos(\hat{A}) = 2zy\cos(\hat{X})$

$b^2 + c^2 - a^2 = y^2 + z^2 - x^2$

بإضافة المقدار 2bc للطرف الأيسر والمقدار 2yz للطرف الأيمن

$\therefore (b+c)^2 - a^2 = (y+z)^2 - x^2$

بالتعويض بإستخدام المعادلة II ينتج أن

$(L-a)^2 - a^2 = (L-x)^2 - x^2$

$L^2 + a^2 - 2aL - a^2 = L^2 + x^2 - 2Lx - x^2$

$$\boxed{\therefore a = x}$$

<u>وينتج شروط الحالة الخامسة</u>

(1) Area of ΔABC = Area of ΔXYZ

(2) $m(\hat{A}) = m(\hat{X})$

(3) $BC = YZ$

$$\therefore \quad \Delta ABC \equiv \Delta XYZ$$

الخــلاصـــة

عند البحث في تطابق المثلثين المتساويين في المساحة نجد أنه يتوجب توافر عنصرين من العناصر المتناظرة تكون متطابقة علي أن يكون أحد العنصرين زاوية وقد بينا خمس حالات ينتج عنها تطابق المثلثين المتساويين في المساحة بخلاف الحالة الأولي نجد أنه من الحالة الثانية وحتي الحالة الخامسة مضافا اليهم مسألة " تساوي محيطي مثلثين مثال (2) " قد اعتمدت هذه الحالات اعتمادا كليا علي البرهان الجبري المذكور بطبيعة البحث وقد استطاع هذا البرهان حل كثير من المسائل في مجال تطابق المثلثين ونجد أنه قد اشترطت في البحث أن تكون هناك بجانب تساوي مساحتي المثلثين تطابق زاوية وعنصر آخر في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر وقد يكون هذا العنصر (ضلع أو عمود او منصف أو متوسط أو تساوي محيطي المثلثين) لكن فى حالة أن يتطابق ضلعان في المثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر بجانب شرط تساوي المساحة ليس هذا كافيا للتطابق إذ أنه قد يتطابق ضلعان في أحد المثلثين مع نظائرهما في المثلث الآخر ويكون المثلثان متساويين في المساحة ولكنهما غير متطابقان .

لــذا فإن الصيغة الصحيحة لهذه الحالة أن تكون علي الصورة

" يتطابق المثلثان المتساويان فى المساحة إذا تطابقت زاوية وضلع فى أحد المثلثين مع نظائرهما فى المثلث الآخر "